Differentialligninger og nummeriske metoder

Thomas G. Kristensen

7. februar 2002

Indhold

1 Indledning **3**

2 Definition af 1. og 2. ordens differentialligninger **3**
2.1 1. ordens differentialligninger 4
2.1.1 Differentialligningen $f'(x) = h(x) \cdot g(y)$ 4
2.1.2 Differentialligningen $f'(x) = kf(x)$ 5
2.1.3 Differentialligningen $f'(x) = a \cdot f(x) + b$ 6
2.2 2. ordens differentialligninger 7
2.2.1 Differentialligningen $f''(x) = h(x)$ 7
2.2.2 Differentialligningen hvor kun $f''(x)$ og $f'(x)$ optræder . . 8

3 Lineære differentialligninger af 1. orden **9**
3.1 Den homogene ligning $y' + a(x)y = 0$ 9
3.2 Den inhomogene ligning $y' + a(x) = b(x)$ 10
3.3 Løsning til den homogene og den inhomogene ligning 11

4 Nummeriske løsninger **12**
4.1 Eulers metode 12
4.2 Runge-Kutta metoder 13

5 Eksemplet på andevendelse af differentialligninger **14**
5.1 Kaffes nedkølning 14
5.2 Forurening i en lille sø 16

6 Konklusion **17**

7 Litteraturliste **18**

8 Bilag **19**
8.1 Bilag 1 19
8.2 Bilag 2 20
8.3 Bilag 3 21
8.4 Bilag 4 22
8.5 Bilag 5 23

1 Indledning

Jeg vil i denne opgave gøre rede for hvad der forstås ved differentialligninger af første og anden orden, og hvordan man løser nogle af disse. Jeg vil gøre rede for hvad lineære differentialligninger er, og hvad der forståes ved den homogene og den inhomogene af disse, og hvordan man løser disse to typer. Jeg vil demonstrere hvordan man finder nummeriske løsninger til differentialligninger, og vurdere Eulers metode og Runge-Kutta metoden af anden og fjerde orden. Til sidst vil jeg give praktiske eksempler på hvordan man kan bruge differentialligninger i den virkelige verden.

Jeg har benyttet sproget TEXtil at skrive denne rapport i, da det giver mulighed for at opskrive matematiske ligninger i et læseligt format, til gengæld bruger dette sprog en stor margin, dette bedes der tages hensyn til. Opgaven er konverteret til PDF fil og derefter udskrevet.

2 Definition af 1. og 2. ordens differentialligninger

Selvom vi allerede kort har gennemgået differentialligninger på Mat A på handelsskolen vil jeg alligevel gentage definitionen af en differentialligning.

definition: Ved definitionen af en differentialligning forstås en ligning hvori en eller flere afledе af en funktion ($y = f(x)$) indgår. Differentialligningen benævnes efter den i denne højst forekommende afledte funktion. Hvis den højest afledede funktion er $f^{(n)}(x)$ kaldes ligningen en n-te ordens differentialligning.
Enhver funktion, der passer i ligningen kaldes ligningen en løsning til differentialligningen, og dens graf kaldes en løsningskurve eller integralkurve.
Mængden af samtlige løsninger kaldes den fuldstændige løsning[1]

Det vil sige at løsningen er givet ved en funktion $f(x)$ der opfylder ligningen så lighedstegnet kommer til at passe. Der findes oftes flere løsninger til en given differentialligning, og man benævner mængden af samtlige løsninger som den fuldstændige løsning.
Endvidere findes der et begreb vi ikke har gennemgået på Mat A, det drejer sig om linjelementer.

definition: Et sæt bestående af tre tal $(x_0, y_0; a)$ kaldes et linjelement når det beskriver et kort linjestykke igennem punktet (x_0, y_0) med hældningen a.[2]

Vi kan bruge linjelementer til at opstille grafiske billeder for differentialligninger. Ved at kigge på løsningen $f(x)$ for en differentialligning $f'(x)$ kan vi opstille en række linjeelementer til at illustrere hvordan de endelige løsninger

[1]definitionen stammer fra M3 side 8, dog lettere omskrevet
[2]definitionen er delvist hentet fra ID3 side 63

kan se ud. Til dette formål behøver vi kun $f'(x)$ og et koordinatsæt (x_0, y_0). Vi beskriver linjelement med betegnelsen $(x_0, y_0, f'(x))$.

Differentialligninger bruges ofte for at beskrive en forænkling af et fænomen. Hvis der f.eks. beskrives en bakteriekulturs populations vækst efter en given tid (og der heraf afledes en populations størrelse ved en given tid) ofte være foregået en forenkling idet der ikke tages højde for at bakterierene før eller siden løber tør for plads til at vokse i. I en rovdyr-byttedyr situation, som oftest også beskrives af differentialligninger vil der oftest heller ikke være taget højde for at andre faktorer spiller ind. F.eks. vil der ikke være taget højde for mængden af vand eller mængden af et alternativt bytte-dyr.

2.1 1. ordens differentialligninger

Ved en differentialligning forståes der efter vores definition fra før at det må være en funktion hvor den højeste afledte er $f^{(1)}$. Dette skrives også på formerne:

$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = F(x, y, y')$$

Vi vil senere se hvordan differentialligninger af 2. orden bliver beskrevet.

2.1.1 Differentialligningen $f'(x) = h(x) \cdot g(y)$

I differentialligningens barndom blev matematikerne ofte nød til at finde nye metoder hver gang de stødte ind i et problem der kunne beskrives som en differentialligning. Men efterhånden fik de dem indelt i forskellige typer. Den jeg vil se på nu er een af de mest brugte.

Jeg betragter differentialligniger af første orden der afhænger af produktet af den uafhængige variabel x og den afhængige y. Denne beskrives generelt på formen

$$f'(x) = g(y) \cdot h(x), \qquad x \in I,\, y \in J \tag{1}$$

hvor I og J er intervaller på hhv. x og y-aksen. Jeg ønsker at finde den fuldstændige løsning til denne ligning[3]. Da h er afhængig af x vil jeg gå ud fra at den er kontinuert i intervallet I, og da g er afhængig af y vil jeg gå ud fra at den er kontinuert i J. Jeg vil også forudsætte at $g(y) \neq 0$ (for $y \in J$).

Det vides at betingelsen for at $y = f(x)$ er en løsning er

$$f'(x) = g(f(x)) \cdot h(x), \qquad x \in I,\, f(x) \in J$$

[3]Løsningsmetode fra ID2 side 58

Og da jeg har foudsat at $g(f(x)) \neq 0$ kan jeg omskrive ved at dividere med $g(f(x))$, jeg får:

$$\frac{1}{g(f(x))} f'(x) = h(x)$$

Og heraf kommer navnet på metoden. Jeg separer de variable, og kan på den måde løse ligningen. Ved integration på begge sider når jeg frem til følgende ligning

$$\int \left(\frac{1}{g(f(x))} f'(x)\right) dx = \int h(x)dx + k$$

Da vi ved at $f'(x) = \frac{dy}{dx}$ ser jeg at $f'(x) \cdot dx = dy$. Med dette in mente og ved at erstatte $f(x)$ med y igen får jeg

$$\int \frac{1}{g(y)} dy = \int h(x)dx + k$$

Ud fra denne omskrivning er det muligt at udregne $y = f(x)$, forudsat at $g(y)$ og $h(x)$ er mulige at differentierer. Ved integration og omregning er det ofte let at nå frem til et brugbart resultat.

2.1.2 Differentialligningen $f'(x) = kf(x)$

En variant af den foregående differentialligning er den, hvor man har sat $h(x) = 1$ og dermed får at

$$f'(x) = kf(x), \qquad k \in \mathbf{R} \tag{2}$$

Beviset for denne kommer også i direkte forlængelse af den forrige. Jeg sætter som sagt $h(x) = 1$ for alle x og $g(y) = ky$. Endnu engang går jeg ud fra at $g(y) \neq 0$, dvs. at $y \neq 0$. Løsningen til denne er

$$f(x) = c \cdot e^{kx}, \qquad x \in \mathbf{R} \tag{3}$$

som jeg i det følgende vil bevise.[4]

Jeg starter med at antage at $y = f(x)$ er løsningen til mit problem. Jeg lader funktionen $h(x)$ være givet ved

$$h(x) = f(x) \cdot e^{-kx}$$

Jeg benytter mig af reglen for differention af produkter som lært på anden år [5]. Af den får jeg at

$$h'(x) = f'(x) \cdot e^{-kx} + f(x) \cdot (-ke^{-kx})$$

Da jeg ved (2) gælder, kan jeg omskrive $h'(x)$ til

$$h'(x) = k \cdot f(x) \cdot e^{-kx} + f(x) \cdot (-k)e^{-kx} = 0$$

[4] Bevis hovedsagligt fundet ved M3 side 20

[5] Differention af et produkt: $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

Nu ved vi at $h'(x) = 0$, ud fra dette kan vi konkludere at $h(x)$ er en konstant, idet konstanter er det eneste der giver 0 ved differention. Denne konstant kalder jeg c. Jeg ved at $h(x) = c$ og at $h(x) = f(x) \cdot e^{-kx}$. Jeg sætter de to udtryk lig hinanden

$$f(x) \cdot e^{-kx} = c$$

Dette udtryk ganger jeg med e^{kx}

$$f(x) = ce^{kx}$$

Jeg har nu vist at hvis f er løsning, så er f af formen $f(x) = ce^{kx}$.[6] Dvs. at der kan altså ikke være andre funktioner der kan være løsninger, jeg har fundet den fuldstændige løsning

Jeg vil nu vise at at hvis $f(x) = ce^{kx}$ så er $f(x)$ løsning. Jeg beviser på en måde den anden vej rundt. Dette gør jeg ved at differentierer det netop fundne resultat.

$$f'(x) = c \cdot k \cdot e^{kx} = k \cdot ce^{kx} = k \cdot f(x)$$

Jeg har dermed vist det ønskede.

2.1.3 Differentialligningen $f'(x) = a \cdot f(x) + b$

Jeg fortsætter med at bygge videre på beviserne. Denne gang kigger jeg på differentialligningen

$$f'(x) = a \cdot f(x) + b. \tag{4}$$

Den fuldstændige løsning til dette udtryk er da givet ved

$$f(x) = -\frac{b}{a} + c \cdot e^{ax}, \qquad x \in \mathbf{R}. \tag{5}$$

Dette ønsker jeg at bevise. Til dette formål skaber jeg ligningen $g(x)$ som jeg sætter lig med højresiden af (4).[7] Da har jeg

$$g(x) = a \cdot f(x) + b,$$

som jeg kan differentiere

$$g'(x) = a \cdot f'(x)$$

ved divition med a får jeg

$$f'(x) = \frac{1}{a} g'(x).$$

[6] Citat taget fra M3 side 20

[7] Fremgangsmåden for beviset er hentet fra M3 side 22

Så langt så godt. Jeg bruger min nye definition af $f'(x)$ i (4)

$$\frac{1}{a}g'(x) = g(x).$$

Ved multiplikation med a får jeg

$$g'(x) = ag(x).$$

Nu kommer tilbygningen med beviset fra før, da denne differentialligning passer ind i mønstret $f'(x) = ky$. Jeg bruger den fuldstændige løsning som fundet i (3)

$$g(x) = c_1 e^{ax}, \qquad c_1 \in \mathbf{R}$$

Jeg erstatter $g(x)$ med udtrykket $a \cdot f(x) + b$ og foretager nogle simple udregninger.

$$\begin{aligned} a \cdot f(x) + b &= c_1 e^{ax} \\ a \cdot f(x) &= -b + c_1 e^{ax} \\ f(x) &= -\frac{b}{a} + \frac{c_1}{a} e^{ax} \\ f(x) &= -\frac{b}{a} + ce^{ax} \end{aligned}$$

Det er hermed bevist at (5) er den fuldstændige løsning til (4), idet jeg forudsætter at $c = \frac{c_1}{a}$. En konstant er vel en konstant.

2.2 2. ordens differentialligninger

Hvis jeg endnu engang kigger på definitionen fra først i denne del, ses det at en differentialligning af anden orden, er en differentialligning hvor den højest afledte er givet ved $f^{(2)}$. Dette skrives også på følgende former

$$f''(x) = y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = F(x, y, y', y'')$$

Anden ordens differentialligninger er ofte meget komplicerede at løse, og ofte helt umulige. Dog vil jeg kigge på simple varianter af disse. Nummeriske metoder kan også bruges til at løse disse besværlige ligninger.

2.2.1 Differentialligningen $f''(x) = h(x)$

Differentialligninger af anden orden hvor denne udelukkende afhænger af en uafhængig variabel (oftest x). Vi opskriver den på formen

$$f''(x) = h(x), \qquad x \in I \tag{6}$$

og jeg vil bevise at den har den fuldstændige løsning

$$f(x) = H_1(x) + c_1 x + c_2, \tag{7}$$

hvor H_1 er en stamfuntion til en stamfunktion til h. Beviset er meget simpelt,[8] og er hurtigt overstået. Af (6) ser jeg umidelbart at der ved integration gælder

$$f'(x) = H(x) + c_1,$$

hvor H er en stamfunktion til h og c_1 er en arbitær konstant. Ved endnu en integration får jeg

$$f(x) = H_1(x) + c_1x + c_2,$$

hvor H_1 er en stamfunktion til H og c_2 er endnu en arbitær konstant. Hermed er påstanden bevist.

Hvis jeg betragter et bestemt punkt (x_0, y_0) hvorigennem min løsning skal gå ser jeg at der skal gælde at

$$y_0 = H_1(x_0) + c_1x_0 + c_2 \tag{8}$$

men til dette findes der uendeligt mange talsæt (c_1, c_2) som tilfredsstiller ligningen. Disse kan beskrives på formen

$$(c_1, y_0 - H_1(x_0) - c_1x_0)$$

ved en simpel omregning af (8). Det vides dog at der igennem et vilkårligt linjeelement $(x_0, y_0; a)$ går en og kun een løsningsgraf, så det er stadig muligt at finde en bestemt løsning.

2.2.2 Differentialligningen hvor kun $f''(x)$ og $f'(x)$ optræder

Hvis der kigges på en differentialligning af anden orden hvor der kun optræder f'' og f' kan de ofte løses ved substitution. Jeg sætter $f' = z$ og løser differentialligningen. Et eksempel[9] kan være at jeg vil bestemme integralkurven til

$$y'' = 3y'$$

som går gennem linjeelementet $(1, 2; 1)$. Jeg indfører min lille substitution og får

$$z' = 3z$$

som jo er simpel at løse, jeg får at

$$z = c \cdot e^{3x}, \qquad c \in \mathbf{R}$$

Da $z(1) = y'(1) = 1$ er det let at finde c:

$$\begin{aligned} 1 &= c \cdot e^3 \\ c &= e^{-3} \end{aligned}$$

[8] Bevis taget fra ID1 side 99
[9] Eksempel taget fra ID3 side 85

Så nu ved jeg at

$$z = y' = e^{-3} \cdot e^{3x}$$

finder jeg stamfunktionen til dette får jeg at

$$y = \frac{1}{3}e^{-3} \cdot e^{3x} + k,$$

hvor k er en arbitær konstant. Ved hjælp af mit linjeelement $(1, 2; 1)$ får jeg at

$$\begin{aligned} 2 &= \frac{1}{3}e^{-3} \cdot e^{3} + k \\ k &= \frac{5}{3}, \end{aligned}$$

som jeg sætter ind min vores ligning og får den søgte integralkurve som er

$$y = \frac{1}{3}e^{3x-3} + \frac{5}{3}$$

Så ved simpel omskrivning af en andengradsligning til en førstegradsligning er det muligt at løse simple differentialligninger af anden orden.

3 Lineære differentialligninger af 1. orden

De ligninger jeg skal til at arbejde med nu, kan deles op i to kategorier. Der er den inhomogene lineære differentialligning af 1. orden, der skrives på formen

$$y' + a(x)y = b(x) \tag{9}$$

og den dertil svarende homogene ligning, der skrives på formen

$$y' + a(x)y = 0 \tag{10}$$

dvs. hvor $b(x)$ er nulfunktionen.

3.1 Den homogene ligning $y' + a(x)y = 0$

Denne homogene ligning har de to følgende egenskaber[10]
Hvis $u(x)$ og $v(x)$ er to løsninger til (10) så er $f(x) = u(x) + v(x)$ også en løsning.
Hvis $k \in R$ og $u(x)$ er en løsning til (10), så er $f(x) = ku(x)$ også en løsning.

Dette er grunden til at man kalder (9) en lineær ligning.[11]

[10] Hentet fra ID3 side 143
[11] Jvf. ID3 side 143

At den første sætning er sand beviser jeg ved at indsætte

$$f(x) = u(x) + v(x)$$

i (10) og får

$$\begin{aligned} f'(x) + a(x)f(x) &= u'(x) + v'(x) + a(x)(u(x) + v(x)) \\ &= u'(x) + a(x)u(x) + v'(x) + a(x)v(x) \end{aligned}$$

Da disse to sidste led hver for sig er løsningen til (10) får jeg at

$$f'(x) + a(x)f(x) = 0 - 0 = 0$$

og da dette passer godt sammen med (10) er sætningen sand.

At den anden sætning er sand beviser jeg ved på samme måde at indsætte

$$f(x) = ku(x)$$

i (10) og får

$$\begin{aligned} f'(x) + a(x)f(x) &= ku'(x) + a(x)ku(x) \\ &= k(u'(x) + a(x)u(x)) \end{aligned}$$

og idet $u'(x) + a(x)u(x)$ er en løsning til (10) får jeg at

$$f'(x) + a(x)f(x) = k \cdot 0 = 0$$

og da dette, endnu engang, passer sammen med (10) er sætningen sand. Hermed er begge sætninger bevist.[12]

3.2 Den inhomogene ligning $y' + a(x) = b(x)$

En væsentlig egenskab ved de lineære inhomogene differentialligninger (9) er, at hvis man kender den fuldstændige løsning til den tilsvarende homogene ligning (10) er det tilstrækkeligt at finde een enkelt løsning til den inhomogene ligning (9) for at kunne angive den *fuldstændige* løsning til (9).[13]

Først en lille hjælpesætning.[14] Jeg vil først bevise, at hvis $f(x)$ og $g(x)$ er løsninger til den inhomogene ligning (9), så er $h(x) = f(x) - g(x)$ en løsning til den homogene ligning (10). Som i de to foregående beviser sætter jeg $h(x)$ ind i $y' + a(x)y$

$$\begin{aligned} h'(x) + a(x)h(x) &= f'(x) - g'(x) + a(x)(f(x) - g(x)) \\ &= (f'(x) + a(x)f(x)) - (g'(x) + a(x)g(x)) \end{aligned}$$

[12]Beviserne for disse to påstande er lavet på opfordring i ID3, men står ikke opført i denne
[13]Mere eller mindre citeret fra ID3 side 143
[14]Hjælpesætningen er hentet fra ID3 side 143

da det vides fra (9) at den inhomogene ligning har formen

$$y' + a(x)y = b(x)$$

kan jeg erstatte de to led med $b(x)$ og får

$$h'(x) + a(x)h(x) = b(x) - b(x) = 0$$

og får at det er lig med den homogene ligning. Dermed er $h(x)$ en løsning til den homogene ligning.

Hvis $f(x)$ er en løsning til den inhomogene lineære ligning (9) af 1. orden, og $u(x)$ er en vilkårlig løsning til den tilsvarende homogene ligning (10), så er

$$h(x) = f(x) + u(x)$$

en vilkårlig løsning til (9). Dette vil jeg bevise ved at indsætte dette i (9)[15], jeg får

$$\begin{aligned} h'(x) + a(x)h(x) &= f'(x) + u'(x) + a(x)(f(x) + u(x)) \\ &= f'(x) + a(x)f(x) + u'(x) + a(x)u(x) \end{aligned}$$

og ser at det første led $f'(x) + a(x)f(x)$ er lig $b(x)$ jvf. (9), og det andet led $u'(x) + a(x)u(x)$ er lig 0 jvf. (10). Af dette får jeg

$$h'(x) + a(x)h(x) = b(x) + 0 = b(x)$$

som var det der ønskes bevist.

3.3 Løsning til den homogene og den inhomogene ligning

Jeg fortsætter bevisrækken, og vil nu vise hvordan man finder løsningen til den homogene ligning

$$y'a(x)y = 0$$

ved et finurligt matematisk trick.[16] Jeg ganger med $e^{A(x)}$, hvor $A(x)$ er en stamfunktion til $a(x)$.

$$y'e^{A(x)} + a(x)ye^{A(x)} = 0$$

At dette er det samme som

$$(ye^{A(x)})' = 0$$

kan vises ved at differentiere ud. Ved integration af udtrykket får jeg

$$\begin{aligned} ye^{A(x)} &= c, \qquad c \in \mathbf{R} \\ y &= ce^{-A(x)}, \qquad c \in \mathbf{R} \end{aligned}$$

[15]Beviset er lavet på opfordring i ID3, men står ikke opført i denne

[16]Finurligt trick er fundet ved ID3 side 144, kommentare er dog mine egne. Anden løsningsmetode er vedlagt som bilag 1

hvormed den vilkårlige løsning til den homogene ligning (10) er fundet. Jeg benytter samme trick for at finde en partikulær løsning til den inhomogene ligning (9)

$$\begin{aligned}
y' + a(x)y &= b(x) \\
y'e^{A(x)} + a(x)ye^{A(x)} &= b(x)e^{A(x)} \\
(ye^{A(x)})' &= b(x)e^{A(x)} \\
ye^{A(x)} &= \int b(x)e^{A(x)}dx \\
y &= e^{-A(x)}\int b(x)e^{A(x)}dx.
\end{aligned}$$

Nu da jeg har fundet en partikulær løsning husker jeg på at den fuldstændige løsning er givet ved at addere en given partikulær løsning af den inhomogene ligning (9) med den vilkårlige løsning til den homogene ligning (10). Af dette får jeg at den fuldstændige løsning til (9) er givet ved

$$y = e^{-A(x)}\int b(x)e^{A(x)}dx + ce^{-A(x)}, \qquad c \in \mathbf{R}$$

hvor $A(x) = \int a(x)dx$. Hermed er den fuldstændige løsning til den lineære homogene differentialligning (9) fundet.

4 Nummeriske løsninger

Til tider (ofte) vil man støde på differentialligninger der er umulige at løse, især differentialligninger af 2. orden og videre kan være meget svære at finde analytiske løsninger til. I de tilfælde kan man løse differentialligningen *nummerisk*. Jeg vil gennemgå to metoder i denne opgave. Først Eulers metode, og dernæst den forbedrede Runga-Kutta metode.

4.1 Eulers metode

Først har man givet et punkt P_0 der har koordinatsættet (x_0, Y_0), i dette punkt findes der er en tangent, hvis hældning jeg også har givet ved differentialligningen $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$.[17] Ved at følge denne tangent ud til et nyt punkt kan man bestemme et nyt koordinatsæt P_1, og ved at blive ved med at gå en smule ud, får man en løsningskurve der tilnærmelsesvis er lig den søgte. De nye koordinatsæt kan skriver jeg på formen

$$(x_{n+1}, y_{n+1}) = (x_n + h, y_n + hf(x_n, y_n))$$

hvor n er indeks for det tidligere punkt, og h er forskellen i x der bruges. Da kurven bliver stykket sammen af mange små rette linjer vil den aldrig blive

[17] Fremgangsmåden er taget fra ID3 side 97 og fra M3 side 12

den eksakte løsning, og de nye punkter man finder vil afvige fra den rigtige løsning. Men ved at bruge et meget lille h opnås en kurve der er meget tæt på den rigtige. Jo større h er, jo mere afviger den nummeriske løsning fra den egentlige. [18]Det skal nævnes at Newton-Ralphson metoden der bruges til at finde tangenthældninger ligner denne metode i fremgangsmåde.

4.2 Runge-Kutta metoder

Eulers metode er smart, men vidrebygningen af denne er endnu mere præcis, den kaldes den forbedrede Euler metode, eller Runge-Kutta metoden. Ved denne metode tager man flere punkter af formen P_n og finder midtpunktet imellem disse for at opnå et punkt der ligger tættere på den egentlige løsningskurve.[19]

Ved at definere det stykke der gåes op ad y aksen for hver h der gåes ud af x aksen som værende

$$\Delta y_{n+1} = hf(x_n, y_n)$$

og derefter kigger på Δy_1 og Δy_2 får jeg at midpunktet imellem de to, altså det mere præsice Δy til at være

$$\Delta y = \frac{1}{2}(\Delta y_1 + \Delta y_2),$$

hvor forskellen fra x_0 stadig er på h. Det nye punkt der fremkommer kalder jeg Q_1, og koordinaterne til dette er

$$Q_1(x_0 + h, y_0 + \frac{1}{2}h(f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1)))$$

hvor koordinatsættet (x_1, y_1) er fundet ved den sædvanlige Euler metode, dvs.

$$(x_1, y_1) = (x_0 + h, y_0 + hf(x_0, y_0))$$

Det nye punkt Q_1 bruges så til at gå videre frem, osv. Denne metode hvor der er brugt to punkter til at finde Q_1 kaldes *Runga-Kutta metoden af anden orden.*

Ved brug af mere end to punkter opnås desto større nøjagtighed, selv med høje værdier af h, men problemet er at dette kræver en del flere udregninger. Til gengæld er denne fremgangsmåde perfekt til computerbrug, hvor maskinen kan foretage en del flere udregninger. Også i fjerde orden starter man med punktet $P_0(x_0, y_0)$ og går videre til $Q_1(x_1, y_1)$, men udregning af koordinatsættet for Q_1 er en smule mere komplicerede da de forskellige punkter bliver vægtet forskelligt[20]

[18]Se bilag 2 for en tabel med sammenligninger og bilag 3 for programkode til at finde Euler værdier

[19]Fremgangsmåden er fundet ved ID3 side 99

[20]Metoden er fundet side 100 i ID3

$$Q_1(x_1, y_1) = Q_1(x_0 + h, y_0 + \frac{1}{6}h(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)),$$

hvor k_1, k_2, k_3 og k_4 er givet ved

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(x_0, y_0) \\
k_2 &= f(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}hk_1) \\
k_3 &= f(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}hk_2) \\
k_4 &= f(x_0 + h, y_0 + hk_3)
\end{aligned}$$

Det betyder, at k_1, k_2, k_3 og k_4 er tangenthældninger i de fire punkter P_0, P_1, P_2 og P_3 der ligger både over og under løsningkurven. Det vægtede gennemsnit der er brugt bestemmer med stor nøjagtighed den egentlige ændring. Med menneskelige ord kan fremgangsmåden beskrives som at man finder hældningen i det oprindelige punkt, derefter skal man finde et punkt midt i intervallet, beregne hældningen for dette, derefter finder endnu et punkt midt i intervallet og udregne hældningen i dette og til sidst finde hældningen i et punkt sidst i intervallet. Disse hældningen skal der så findes et vægtet gennemsnit af, før man har et y koordinat man kan være tilfreds med.

At Runga-Kutta metoden er langt mere præcis end Eulers ses af bilag 2, hvor differentialligninger $\frac{dy}{dx} = y$ er brugt, idet dens løsning allerede kendes som værende e^x når man går ud fra punktet $P_0(0, 1)$.[21]

5 Eksemplet på andevendelse af differentialligninger

5.1 Kaffes nedkølning

Et overskueligt fænomen, jeg vil kigge på er, hvordan nedkølningen af kaffe kan beskrives som en ligning ved hjælp af et observationssæt.[22] Observationssættet har følgende udformning

tid t i min	0	2	4	6
temperatur i °C	85,0	77,7	71,1	65,3

Kaffens nedkølning sker i intervallerne
0 til 2 med 7,3 °C
2 til 4 med 6,6 °C
4 til 6 med 5,8 °C

[21] Se bilag 4 og 5 for programkode til disse tabeller
[22] Eksemplet er hentet fra M3 side 36

og det ses, at jo større forskellen er mellem kaffen og luften i lokalet (20 °C) jo større er temperaturændringen. Ifølge Newtons afkølingslov[23] gælder det at ændringen i et legemes temperatur er proportional med temperaturforskellen mellem legemet og omgivelserne.

Ud fra kendskab til dette opstiller jeg differentialligningen

$$\frac{dy}{dt} = c(y(t) - 20), \qquad t > 0$$

hvor kaffens temperatur er $y(t)$ til tiden t i minutter. $\frac{dy}{dt}$ angiver temperaturændringen der her er negativ, $(y(t) - 20)$ er temperaturforskellen, der selvf. er positiv, og c er den magiske konstant, der her er negativ for at gøre udtrykket sand. Jeg går ud fra at omgivelsernes temperatur er konstant, hvilket er en forenkling, idet luftens temperatur vil stige idet kaffens falder, men hvis vi regner med et godt stort lokale er denne ændring næppe til at registrere.

Jeg vil nu omregne denne differentialligning ved at skrive y istedet for $y(t)$ og gange c igennem parantesen

$$\frac{dy}{dt} = cy - 20c$$

Denne differentialligning har jeg allerede gennemgået i 2.1.3 og jeg ved derfor at løsningen er givet ved

$$y(t) = \frac{20c}{c} + c_1 e^{ct} = 20 + c_1 e^{ct}$$

Der kendes koordinatet $y(0) = 85$, så c kan udregnes

$$\begin{aligned} 20 + c_1 e^{c \cdot 0} &= 85 \\ c_1 = 65 \end{aligned}$$

og får at

$$y(t) = 20 + 65e^{ct}$$

og får at finde konstanten c tager jeg et t der ikke er 0. Da $y(6) = 65,3$ er

$$\begin{aligned} 20 + 65e^{6c} &= 65,3 \\ e^{6c} &= \frac{453}{650} \\ 6c &= ln(\frac{453}{650}) \\ c &\simeq -0,06 \end{aligned}$$

Den fuldstændige regneforskrift for $y(t)$ er da givet ved

$$y(t) = 20 + 65e^{-0,06t} = 20 + 65 \cdot 0,942^t$$

[23]Hentet fra M3 side 37

Jeg kontrollerer ved at indsætte 2 og 4 i ligningen og får at $y(2) = 20 + 65e^{-0,06\cdot 2} \simeq 77,6$ og $y(4) = 20 + 65e^{-0,06\cdot 4} \simeq 71,1$, hvilket passer fint overens med observationssættet. Her kunne man altså, ud fra et observationssæt og logiske overvejelser nå frem til en ligning der beskriver kaffes temperatur til en given tid.

5.2 Forurening i en lille sø

Nu nogle mere samfundskritiske udregninger. Denne gang skal det handle om en skovsø[24] der indeholder $6 \cdot 10^7$ liter rent vand. Givet er et forurenet vandløb der hvert sekund bringer 12 liter væske ud i søen, heraf er 0,5 liter forurening. Det forudsættes at denne blanding straks bliver blandet med indholdet af søen og at 12 liter konstant forlader søen pr. sek. så mængden af væske i søen er konstant ($6 \cdot 10^7$). Jeg lader $f(t)$ angive antal liter forurening i søen til en given tid t. Derfor må der i een liter søvand være

$$\frac{f(t)}{6 \cdot 10^7}$$

liter forurening. Da der hvert sekund forsvinder 12 liter væske fra søen forsvinder der altså 12 gange mængden af forurening i een liter søvand pr. sek., hvilket kan skrives på formen

$$\frac{12 \cdot f(t)}{6 \cdot 10^7} = 2 \cdot 10^{-7} \cdot f(t)$$

ændringen af forurening i søen er selvf. den indgående mængde minus den udgående mængde, da ændringen er $f'(t)$ kan jeg opstille differentialligningen

$$f'(t) = 0,5 - 2 \cdot 10^{-7} \cdot f(t)$$

Det er i 2.1.3 bevist at løsningen til $f(t) = b + a \cdot f(t)$ er givet ved

$$f(t) = -\frac{b}{a} + c \cdot e^{at}$$

Idet der ingen forurening er til tiden 0 kan jeg finde c

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{b}{a} + c \cdot e^0 \\ c &= \frac{b}{a} \end{aligned}$$

så løsningen bliver

$$f(t) = -\frac{b}{a} + \frac{b}{a} \cdot e^{at} = \frac{b}{a}(e^{at} - 1)$$

[24]Skovsø eksemplet er taget fra M3 side 51

og da

$$\frac{b}{a} = -\frac{0,5}{2 \cdot 10^{-7}} = -0,25 \cdot 10^7$$

er mængden af forurenet stof i søen til tidpunktet t givet ved

$$f(t) = -0,25 \cdot 10^7 (e^{-2 \cdot 10^{-7} t} - 1)$$

og sådan kan man bruge differentialligninger til at finde ud af hvor forurenet en sø er. Det ses yderligere at

$$e^{-2 \cdot 10^{-7} t} \to 0$$

for $t \to \infty$ så

$$f(t) \to 0,25 \cdot 10^7$$

for $t \to \infty$. Det vil sige at søen maksimalt kan indeholde $0,25 \cdot 10^7$ liter forurening. Den maksimale forurening udgør altså $\frac{0,25}{6}$ eller $4,2$ procent af søen.

6 Konklusion

Jeg har igennem rapporten beskrevet de i indledningen anførte ting, og har opnået en dybere forståelse for emnet end jeg havde før påbegyndelsen af rapporten. Det har været interessant at se hvordan de forskellige bøger har beskrevet de samme ligninger og deres løsninger på forskellige måder, og hvordan de genrelt har behandlet emnerne forskelligt. F.eks. har noget materiale i DL været direkte svært at gå til, mens andre bøger har gjort forståelsen af dette materiale lettere.

Jeg har vist hvordan differentialligninger ofte kan bruges til at beskrive sammenhænge i den virkelige verden, og jeg har vist hvordan differentialligninger kan løses, både analytisk og numerisk.

Alt i alt mener jeg at jeg er kommet godt omkring emnet, og jeg håber rapporten er blevet vellykket.

Thomas G. Kristensen

7 Litteraturliste

I mine noter har jeg brugt forkortelserne fundet i denne litteraturliste.

ID1 Jensen, Steffen: Integralregning og differentialligninger
Christian Ejlers' Forlag, 1991

ID2 Larsen, Niels Holm: Integralregning og differentialligninger
Gjellerup og Gad, 1990

ID3 Clausen, Flemming: Integralregning og differentialligninger
Munksgaard, 1993 1. udgave 1. oplag

M3 Carstensen, Jens: Mat 3A
Systime, 1999 1. udgave 1. oplag

DL Kristensen, Erik: Differentialligninger
GEC Gads forlag, 1972

DM Heefelt, Mogens Brun: Dynamiske modeller
Gyldendal 1990 1. oplag

8 Bilag

8.1 Bilag 1

Jeg har i min opgave fundet løsningen til den homogene differentialligning af første orden, men jeg vil nu vise at det også kan gøres ved en form for seperation af de variable.[25]

den homogene ligning har formen

$$y' + f(x)y = 0 \tag{11}$$

Jeg starter med at omskrive ligningen, hvorefter jeg kan bruge en form for seperation af de variable som jeg også brugte med ligningen $f'(x) = g(y)h(x)$ i 2.1.1, der er dog ikke tale om den samme fremgangsmåde. Jeg starter med at omskrive ligningen så

$$\frac{dy}{dx} = -f(x)y$$

Det er før bevist at følgende omskrivning er lovlig[26]

$$\frac{1}{y}dy = -f(x)dx$$

Ved integration findes det at

$$\int \frac{1}{dy}dy = -\int f(x)dx$$

hvilket betyder at

$$ln(|y|) = -F(x) + k$$

Ved at opløfte disse to udtryk på hver side af lighedstegnet får jeg at

$$|y| = e^{-F(x)+k} = e^k e^{-F(x)}$$

da der er tale om et produkt gælder det at

$$y = e^k e^{-F(x)} \qquad \text{eller} \qquad y = -e^k e^{-F(x)}$$

Mine udregninger tyder på at (11) har løsningen

$$y = ce^{-F(x)} \tag{12}$$

hvor c er en arbitær konstant. Jeg vil nu sikrer mig at der virkelig er tale om løsningen til ligningen. Jeg differentierer først (12)

$$y' = -f(x)ce^{-F(x)}$$

og indsætter dette og (12) i (11)

$$\begin{aligned} y' + f(x)y &= 0 \\ -f(x)ce^{-F(x)} + f(x)ce^{-F(x)} &= 0 \end{aligned}$$

og ser at det er en lovlig løsning.

[25] Udregningerne er fundet i DL side 68, dog er dele omformuleret, og kommenteret yderligere

[26] jvf. 2.1.1

8.2 Bilag 2

Dette bilag knytter sig til afsnittet om nummeriske løsninger. Jeg har brugt en ligning der er mulig at løse for at kontrollere tallene fundet ved nummeriske løsninger. Ligningen $f'(x) = y$ har som det vides løsningen $f(x) = e^x$ i punktet $P_0(0, 1)$. Jeg har brugt en h-værdi på $0,5$ for at demonstrere hvor meget Eulers metode afviger, og hvor tæt på Runge-Kutta metoden af 4. orden kommer selv med så høje forskelle. RK-2 er Runge-Kutta metoden af 2. orden, og RK-4 er af 4. orden.

x	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
e^x	1	1,649	2,718	4,482	7,389	12,183	20,086
Euler	1	1,500	2,250	3,375	5,063	7,593	11,391
RK-2	1	1,625	2,641	4,291	6,973	11,331	18,413
RK-4	1	1,648	2,717	4,479	7,384	12,172	20,065

som det ses er RK-4 meget tæt på den egentlige løsning, selv med et h på $0,5$. Eulers afviger meget, men kan stadig bruges til at få en grov skitse af løsningen, især ved nedsættelse af h. Den samme ligning med samme startpunkt men med et h på $0,25$ giver følgende Euler værdier og Runga-Kutta værdier[27]

x	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
e^x	1	1,649	2,718	4,482	7,389	12,183	20,086
Euler	1	1,563	2,441	3,815	5,960	9,313	14,552
RK-2	1	1,642	2,695	4,429	7,262	11,922	19,571
RK-4	1	1,649	2,718	4,482	7,389	12,182	20,084

Disse tabeller er genereret ud fra programmerne der er vedlagt i bilagene

[27] Jeg har sprunget over hveranden x-værdi i tabellen

8.3 Bilag 3

Her følger programkoden til programmet der er brugt til at finde Euler værdier i bilag 2 med funtionen $y' = y$ og begyndelsespunktet $(0, 1)$. Programmet er skrevet til ti-83 maskiner. Jeg har i eksempel to i bilag 2 ændret H til 0,25, hvilket ikke fremgår af følgende kode.

EULER

```
.5->H
0->X
1->Y
While X < 4
X+H->X
Y+HY->Y
Disp "X", X
Disp "Y", Y
Pause
ClrHome
End
```

8.4 Bilag 4

Her er programkoden til det program jeg brugte til at finde Runge Kutta værdierne af anden orden i bilag 2 med funktionen $y' = y$ og begyndelsespunktet $(0, 1)$. Programmet er skrevet til ti-83 maskiner. Jeg har i eksempel to i bilag 2 ændret H til 0,25, hvilket ikke fremgår af følgende kode.

RK2

```
.5->H
0->X
1->Y
While X < 4
X+H->X
Y->K
Y+HK->L
(K+L)->T
Y+.5HT->Y
Disp "X", X
Disp "Y", Y
Pause
ClrHome
End
```

8.5 Bilag 5

Her er programkoden til det program jeg brugte til at finde Runge Kutta værdierne af fjerde orden i bilag 2 med funktionen $y' = y$ og begyndelsespunktet $(0, 1)$. Programmet er skrevet til ti-83 maskiner. Jeg har i eksempel to i bilag 2 ændret H til 0,25, hvilket ikke fremgår af følgende kode.

RK4

```
.5->H
0->X
1->Y
While X < 4
X+H->X
Y->K
Y+.5HK->L
Y+.5HL->M
Y+HM->N
(K+2L+2M+N)/6->T
Y+HT->Y
Disp "X", X
Disp "Y", Y
Pause
ClrHome
End
```